Chapitre 1

Pack de démarrage

I Les fonctions à connaître

1) Vocabulaire et notations

a) Généralités :

Définition 1

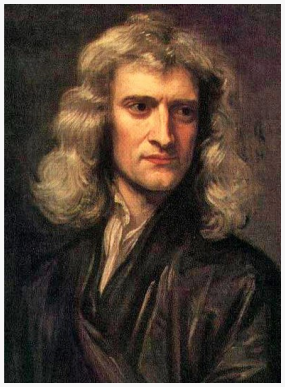
> *On appelle fonction (réelle) tout objet mathématique qui à un nombre x appartenant à un ensemble de départ associe un nombre appelé "image".*
> *Si la fonction s'appelle f, on note $f(x)$ l'image de x par f.*

De manière plus "naturelle", une fonction désigne une sorte de machine qui effectue une opération sur des nombres.

Par exemple, la machine "élever au carré" prend un nombre (qu'on aime bien appeler x) et le multiplie par lui même (c'est à dire x^2).

? Le saviez-vous ? *au coeur de l'analyse : Leibniz et Newton*





L'étude des fonctions est au coeur des recherches en mathématiques au XVIIè siècle, et les deux plus célèbres fondateurs de ces études sont Gottfried Wilhelm Leibniz (Allemagne, 1646-1716) et Isaac Newton (Angleterre, 1642-1727).

Le terme "fonction" est introduit par Leibniz, à partir du mot latin *functio* ("remplir une tâche").

Les deux sont reconnus comme des maîtres aussi bien en sciences (mathématiques et physique) qu'en lettres (philosophie, théologie....).

Leibniz et Newton se sont opposés sur plusieurs points. Les deux ont revendiqué la paternité du calcul infinitésimal (les dérivées, les intégrales, les limites, etc.), mais leur opposition la plus forte concerne la physique. Malgré son éducation fondamentalement religieuse, Newton a établi les lois de la physique à partir d'observations, sans chercher de raison divine derrière ce qu'il découvrait. Leibniz, de son côté, refusait tout ce qui pouvait remettre en question la "perfection divine", ce qui engendra quelques conflits entre les deux hommes....

Définition 2

On dit qu'une fonction f est définie sur un ensemble D si et seulement si pour tout x dans D, le nombre $f(x)$ existe.
On appelle alors ***ensemble de définition*** *le plus grand ensemble sur lequel la fonction est définie.*
Si la fonction s'appelle f, cet ensemble est souvent noté D_f (D_g si elle s'appelle g, etc...).

Exemple :

Soit la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$.

Comme on ne peut pas effectuer l'opération de division par 0, $f(x)$ n'existe que si $x-1$ ne vaut pas 0, c'est à dire si $x \neq 1$.

Ainsi, l'ensemble de définition de la fonction f est $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

A noter : *Restriction de l'ensemble*

On n'a pas forcément besoin de travailler sur l'ensemble "maximum" de définition d'une fonction.
Dans l'exemple ci dessus, on pourrait très bien dire que f est définie sur l'intervalle $[2;3]$, puisque "pour tout x dans l'intervalle $[2;3]$, $f(x)$ existe".
Si on n'étudie f que sur $[2;3]$, on dit qu'on a restreint f à l'intervalle $[2;3]$. C'est une opération que l'on fera assez fréquemment....

Notation

Si f est définie sur un ensemble E avec des images dans un ensemble F, on pourra utiliser la notation suivante :

$$f : \begin{array}{ccc} E & \to & F \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$$

Exemple :

La fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$ peut s'écrire :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \setminus \{1\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{x-1} \end{array}$$

Si on veut parler de la restriction à $[2;3]$, on pourra écrire :

$$f : \begin{array}{ccc} [2;3] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{x-1} \end{array}$$

Enfin, l'ensemble d'arrivée, ici $\mathbb{R}$, pourrait être affiné avec une étude de la fonction, mais dans un premier temps, dire que c'est $\mathbb{R}$ suffit.

b) Composition de fonctions

Définition 3

Si f et g sont deux fonctions telles que, pour certains nombres x, le calcul de $f(g(x))$ a un sens, on dit qu'on a composé g par f et on peut noter $f \circ g$ la fonction obtenue.

Exemple :
$x \mapsto \dfrac{1}{x-1}$ est la composition de $g : x \mapsto x-1$ par $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$.
En effet, on a effectivement $f(g(x)) = \dfrac{1}{g(x)} = \dfrac{1}{x-1}$

Méthode : *Détermination de l'ensemble de définition d'une composition*

Soit une fonction de la forme $x \mapsto f(g(x))$, avec f définie sur un ensemble E et g définie sur un ensemble G, alors :

$x \mapsto f(g(x))$ est définie si et seulement si $g(x)$ est définie **et** f définie en $g(x)$.

On commencera donc toujours par regarder la fonction qui est "à l'intérieur" (ici, g), avant de chercher à quelle(s) condition(s) sur x les images de x par cette fonction sont dans le domaine de définition de la fonction qui "englobe" tout ça (la fonction f).

Exemple :
C'est exactement ce qu'on a fait pour la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x-1}$
On commence par la fonction à l'intérieur :
$g : x \mapsto x-1$ est définie sur $\mathbb{R}$, celle ci ne pose donc pas de problème.
La fonction "qui englobe" est $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$.
Celle ci est définie sur $\mathbb{R}^*$. On regarde donc quand $g(x)$ est dans $\mathbb{R}^*$.

On résout alors l'équation $g(x) \neq 0$, c'est à dire $x-1 \neq 0$, ou encore $x \neq 1$.

Au final l'ensemble de définition est donc $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Exemple :
Trouver le domaine de définition maximal de la fonction $x \mapsto \sqrt{x-3}$.

2) Fonctions "élémentaires"

a) Puissances entières : $x \mapsto x^n$ avec $n \in \mathbb{Z}$

Définition :

Définies sur $\mathbb{R}$ si $n \geq 0$, ou $\mathbb{R}^*$ si $n \leq 0$.

(i) pour $n = 0$: $x^0 = 1$

(ii) si $n > 0$,

$$x^n = x \times x^{n-1} = \underbrace{x \times \ldots \times x}_{n \text{ facteurs}}$$

(iii) si $n < 0$ et $x \neq 0$,

$$x^n = \left(\frac{1}{x}\right)^{-n} = \underbrace{\frac{1}{x} \times \ldots \times \frac{1}{x}}_{-n \text{ facteurs}}$$

Limites :

si $n > 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} x^n = +\infty$.

si $n < 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} x^n = 0$.

Propriétés calculatoires :

pour tout x et y dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^*$ pour $n < 0$:

(i) $(x^p)^q = x^{pq}$

(ii) $x^p x^q = x^{p+q}$

(iii) $\dfrac{x^p}{x^q} = x^{p-q}$

(iv) $(xy)^n = x^n y^n$

Dérivation et primitive :

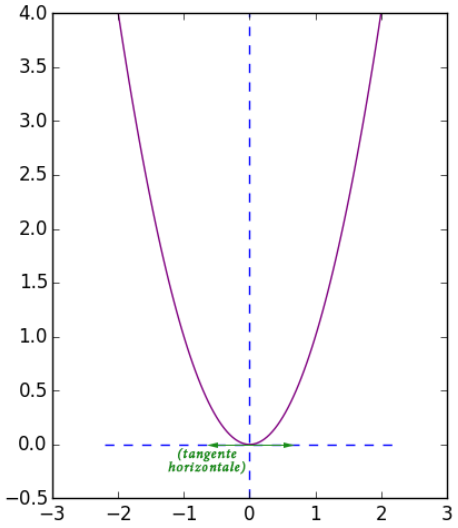
Dérivable sur $\mathbb{R}$ si $n \geq 0$ et sur $\mathbb{R}^*$ si $n < 0$.

Dérivée : $x \mapsto nx^{n-1}$. (même si $n < 0$...)

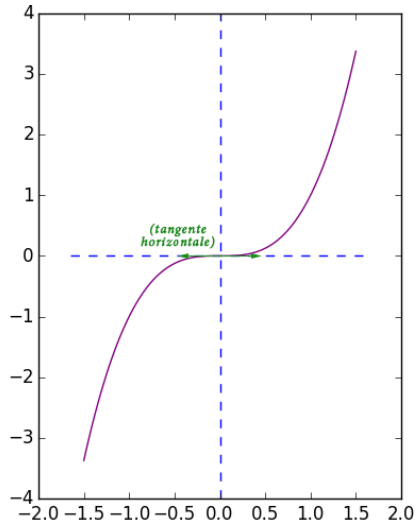
Une primitive :

si $n \neq -1$, $x \mapsto \dfrac{1}{n+1} x^{n+1}$.

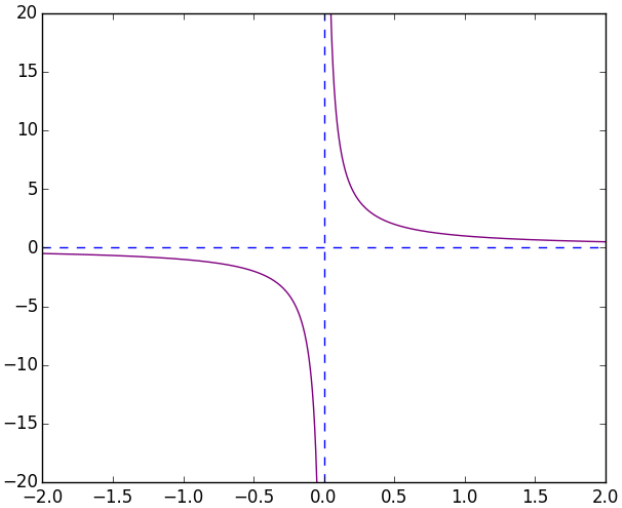
si $n = -1$, $x \mapsto \ln(|x|)$.



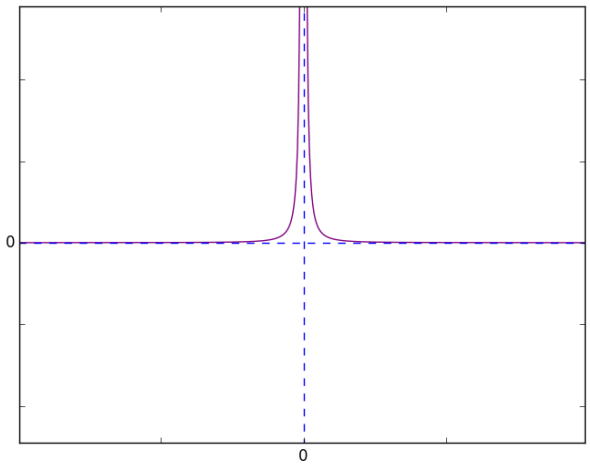
$n = 2$



$n = 3$



$n = -1$



$n < 0$ et pair

b) Racine carré

Définition

Fonction réciproque de $x \mapsto x^2$.
Définie sur $\mathbb{R}_+$.

Propriété de réciprocité :

1. Pour tout $x \geq 0$, $(\sqrt{x})^2 = x$
2. ⚠pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sqrt{x^2} = |x|$.

Propriétés de calculs :

Pour tout x et y positifs ou nuls :

1. $\sqrt{xy} = \sqrt{x}\sqrt{y}$
2. (si $y \neq 0$) $\sqrt{\dfrac{x}{y}} = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$

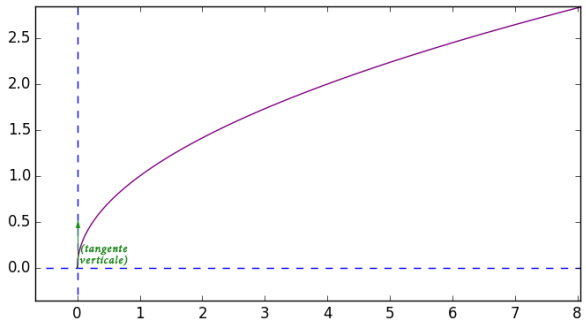
⚠ : L'hypothèse x et y positif est essentielle car $\sqrt{xy}$ peut être défini mais pas $\sqrt{x}$ ni $\sqrt{y}$!
⚠ : $\sqrt{x+y}$ n'est pas en général égal à $\sqrt{x} + \sqrt{y}$...

Dérivation et primitive :

Dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$

Dérivée : $x \mapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

Primitive :$x \mapsto \dfrac{2}{3}x\sqrt{x}$



Particularité :

Bien que $x \mapsto \sqrt{x}$ ne soit pas dérivable en 0, elle y est tout de même définie (avec $\sqrt{0} = 0$) et on a une tangente (verticale)

c) Valeur absolue : $x \mapsto |x|$

Définition :

Définie sur $\mathbb{R}$ par :

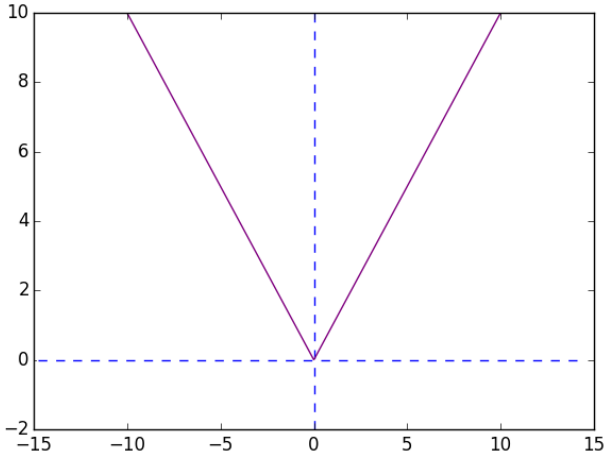
$$|\ |\ : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases} \end{array}$$

Dérivation et primitive

Non dérivable en 0.
Pour l'intégration comme pour la dérivation de fonctions contenant des valeurs absolues, on restreint l'ensemble d'étude afin de remplacer la valeur absolue.

Propriétés de calcul :

Pour tout x et y réels
(i) $|x| \geq 0$
(iii) $|xy| = |x||y|$
(iv) $|x+y| \leq |x| + |y|$



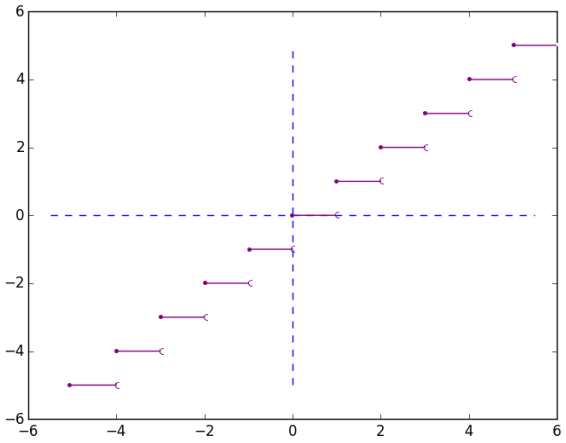
d) Partie entière : $x \mapsto \lfloor x \rfloor$

Définition :

Définie sur $\mathbb{R}$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\lfloor x \rfloor$ désigne l'unique entier $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n \leq x < n+1$.
Par exemple : $\lfloor 2,3 \rfloor = 2$ et $\lfloor -3,1 \rfloor = -4$

Particularités :

Continue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.
Non continue en tout point de $\mathbb{Z}$, mais continue "à droite" sur $\mathbb{R}$.
Dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ de dérivée nulle...
(Pourtant, elle n'est pas constante...)



3) Fonctions "avancées"

a) Exponentielle : $x \mapsto \exp(x)$ (ou $x \mapsto e^x$)

Ensemble de définition et propriété :

Définie sur $\mathbb{R}$.
Elle vérifie :
(i) $\forall x \in \mathbb{R}, e^x > 0$
(ii) $e^0 = 1$

Limites :

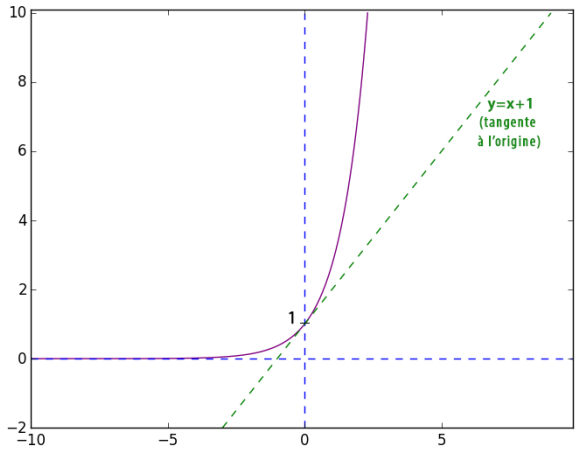
(i) $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$
(ii) $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$

Dérivation et primitive :

Dérivable sur $\mathbb{R}$.
Dérivée : exp.
Une primitive : exp.

Propriétés de calcul :

Pour tout x et y réels :
(i) $e^x e^y = e^{x+y}$
(ii) $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$
(iii) $\dfrac{e^x}{e^y} = e^{x-y}$



b) Logarithme népérien : $x \mapsto \ln(x)$

Définition et propriétés

Définie sur $\mathbb{R}_+^*$ comme primitive à $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ qui s'annule en 1 ou comme bijection réciproque de exp.

Valeurs clés :

(i) $\ln(1) = 0$

(ii) $\ln(e) = 1$

Limites :

(i) $\lim\limits_{x \to 0} \ln(x) = -\infty$

(ii) $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$

Dérivation et primitive :

Dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Dérivée $x \mapsto \dfrac{1}{x}$.

Une primitive : $x \mapsto x \ln x - x$.

Réciprocité :

(i) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\ln(e^x) = x$

(ii) Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $e^{\ln x} = x$

Propriétés de calcul :

Soient $x > 0$ et $y > 0$

(i) $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$

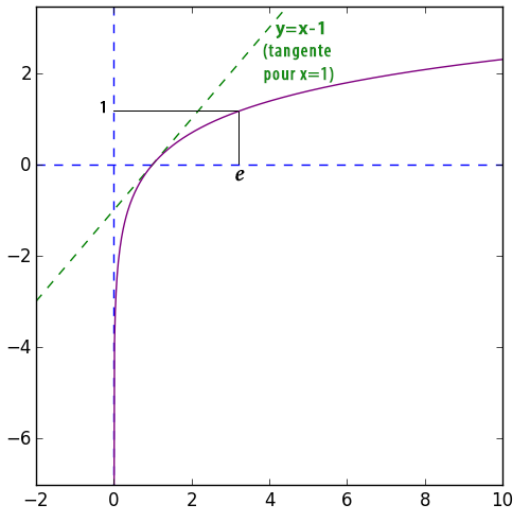
(ii) $\ln\left(\dfrac{1}{x}\right) = -\ln(x)$.

(iii) $\ln\left(\dfrac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$.

(iv) pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\ln(x^n) = n \ln(x)$

(v) $\ln(\sqrt{x}) = \dfrac{1}{2} \ln(x)$

⚠ : toujours vérifier le signe de x et de y dans les propriétés ci dessus...



4) Fonctions trigonométriques : cos, sin et tan

a) Définitions :

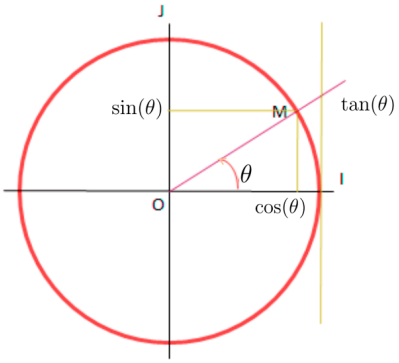
Dans le plan muni d'un repère (O, I, J), on appelle cercle trigonométrique le cercle de rayon 1 et de centre l'origine du repère.

Soit M un point sur le cercle et θ l'angle orienté $(\vec{i}, \vec{OM})$.

On appelle $\cos(\theta)$ l'abscisse de M, $\sin(\theta)$ l'ordonnée.

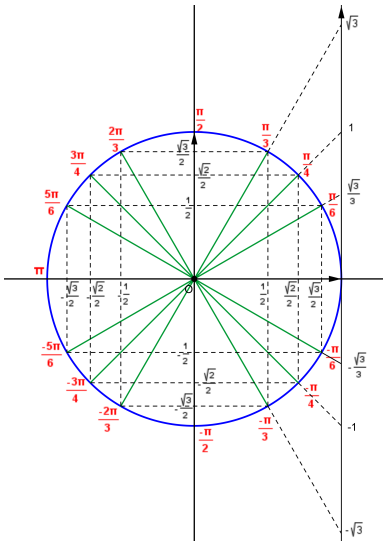
On pose $\tan(\theta) = \dfrac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}$.

On peut montrer, avec le théorème de Thalès, que $\tan(\theta)$ se lit alors sur la tangente au cercle en $(0; 1)$.



b) Valeurs à connaître :

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\tan\theta$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$		$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0



c) Formules :

Symétrie et parité :

Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

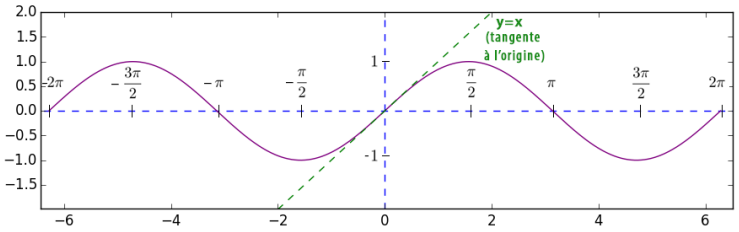
1. $\cos(-x) = \cos x$
2. $\sin(-x) = -\sin x$
3. $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$
4. $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$

Propriétés de calcul :

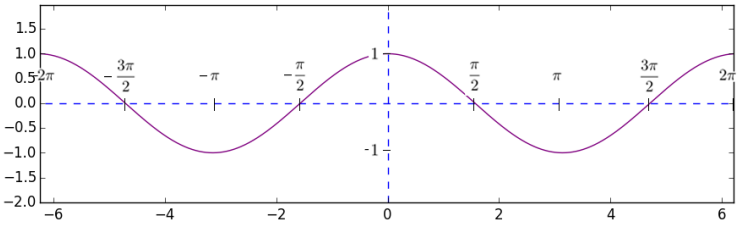
1. $\forall x \in \mathbb{R}, \cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$
2. $\forall a, b \in \mathbb{R}$,
   $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$
   $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$
3. $\forall a, b \in \mathbb{R}$,
   $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$
   $\sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$

Dérivabilité et primitives :

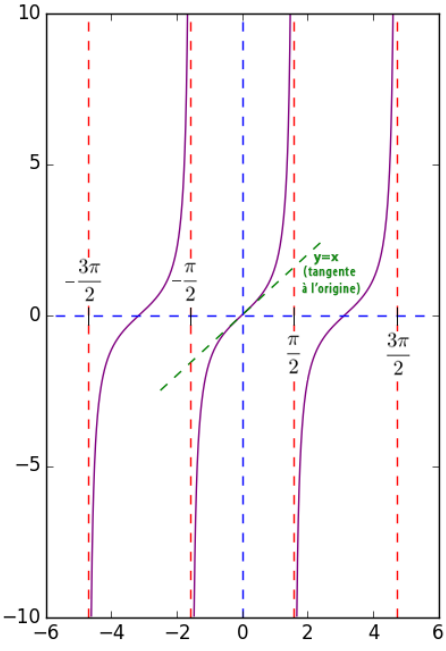
Dérivables sur leurs domaines de définition.
Dérivées :
$(\cos(x))' = -\sin(x)$,
$(\sin(x))' = \cos(x)$,
$(\tan(x))' = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$
Primitives :
une primitive de cos : $x \mapsto \sin(x)$.
une primitive de sin : $x \mapsto -\cos(x)$
une primitive de tan : $x \mapsto -\ln(|\cos(x)|)$



$x \mapsto \sin x$



$x \mapsto \cos x$



$x \mapsto \tan x$

II Quantificateurs et Méthodes de raisonnement

1) Quantificateurs mathématiques

Notation

Afin de clarifier et simplifier les écritures mathématiques, on utilise fréquemment les notations suivantes :

(i) $\forall$, qui signifie "pour tout" ou "quel que soit",

(ii) $\exists$, qui signifie "il existe" (sous entendu : "il existe au moins un"),

(iii) $\exists!$, qui signifie "il existe un unique".

Ces notations sont appelées "quantificateurs universels".

Remarque :
Le $\exists$ est toujours suivi de "tel que" : "il existe x tel que blablabla". On peut faire suivre le $\exists$ d'une barre oblique "/" pour insister sur ce tel que, mais vous verrez souvent seulement une virgule.

Exemples :
Pour les propositions logiques suivantes, faire une phrase en français puis dire si cette proposition est vraie :

$$A : \forall n \in \mathbb{N}, n^2 \geq n$$

$$B : \forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq x$$

$$C : \exists x \in \mathbb{R}, x^2 < x$$

C'est en fait la négation de B.
On peut alors noter $C = \bar{B}$ (comme en probabilité, la barre traduit la négation, le "contraire")

Méthode : *Quantificateurs et passage à la négation*

Quand on cherche à écrire le contraire d'une phrase contenant des quantificateurs, on remplace $\forall$ par $\exists$ et réciproquement.
En effet, si on veut nier une phrase affirmant "pour tout", on va donner un contre exemple : ça donne un "il existe".
Réciproquement, si on veut nier l'existence d'un nombre vérifiant une propriété, on va montrer que "pour tous" les nombres, on n'a pas la propriété.

Exemple :
La phrase :

$$\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, \sqrt{x} = y$$

se nie en :

$$\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, \sqrt{x} \neq y$$

Remarque :
Comme en français, une double négation revient à la proposition initiale.

Danger ! *ne pas oublier les quantificateurs !*

En mathématiques, les expressions données sans précision via un quantificateur ou son équivalent "en français", n'ont pas de sens : une "proposition logique" (c'est à dire une phrase mathématique) doit sans ambiguïté être vraie ou fausse.

Par exemple dire juste "$n^2 \geq n$" n'est pas une proposition valide si on ne dit pas ce qu'est n (est-ce un entier ? un réel ? Tous les entiers ? Toutes les fractions ? etc....) : il y a une ambiguïté dans la phrase...

Danger ! *l'ordre des opérateurs est essentiel !*

Quand des variables sont introduites via des "il existe", celles ci peuvent dépendre des précédentes :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \exists y \in \mathbb{R}, xy = 1$$

Signifie que pour tout x non nul, il y a un y dont le produit vaut 1 : ce y dépend de x (en fait $y = \frac{1}{x}$)
En revanche, si on écrit :

$$\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}^*, xy = 1$$

Cela signifie qu'il y un y, valable indépendamment de tous les x, tels que $yx = 1$: c'est bien sûr faux....

Méthode : *Comment prouver un $\forall$? un $\exists$?*

Quand on cherche à prouver une proposition du type

$$\forall x \in \mathbb{R}, P$$

avec P une proposition logique, il faut prendre un x réel quelconque et montrer que ce x vérifie P. On commencera donc la rédaction par "Soit $x \in \mathbb{R}$...".
Si l'on cherche à prouver une proposition du type

$$\exists x \in \mathbb{R}, P$$

avec P une proposition logique, il faut en exhiber un pour lequel ça marche.

Exemples :
Prouvons les propositions suivantes :

$$A : \forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$$

$$C : \exists x \in \mathbb{R}, x^2 < x$$

Méthode : *Comment prouver qu'un $\forall$ est faux ? qu'un $\exists$ est faux ?*
Si on veut prouver qu'une proposition du type

$$\forall x \in \mathbb{R}, P$$

ou du type

$$\exists x \in \mathbb{R}, P$$

avec P une proposition logique est fausse, il faut prouver que la contraposée est vraie. On commence donc par écrire la négation de notre propriété puis on la prouve.

Exemple :
Prouver que les propositions suivantes sont fausses :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sqrt{n} \leq 50.$$

$$\exists n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, n \geq x.$$

2) Implications, équivalences, etc.

a) Implication : définition intuitive

Définition 4

Soit A et B deux propositions logiques. On dit que $A \implies B$ si le fait que A soit vrai garantit que B est vrai.
Autrement dit, $A \implies B$ peut se traduire en "si A est vraie, alors B est vraie".

Exemples :

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'implication $x \geq 1 \implies x^2 \geq x$ est
- "il y a des nuages" $\implies$ "il pleut" est

b) Négation de l'implication :

Soient A et B deux propositions, et P la phrase $A \implies B$.
Nier P, c'est dire qu'on peut avoir A, mais pas B. Autrement dit, la negation d'une implication est la phrase logique "A et pas B".

Propriété 1

Soit A et B deux propositions, la négation de

$$A \implies B$$

est

$$A \text{ et } \bar{B}$$

Exemples :

- la négation de "il y a des nuages $\implies$ "il pleut" est "il peut y avoir des nuages **et** pas de pluie".
- la phrase $\forall x \in \mathbb{R}^*, (x > 0 \implies \dfrac{1}{x} < 1)$ se nie en

Remarque :
Il faut mettre entre parenthèses la proposition logique suivant les quantificateurs dès lors qu'il peut y avoir confusion.

c) Réciproques et équivalence :

Définition 5

On appelle réciproque de $A \implies B$ la phrase $B \implies A$.

En général, ce n'est pas parce que $A \implies B$ que $B \implies A$.

Exemples :

- Soit $x \in \mathbb{R}$.
  La phrase $x \geq 0 \implies x^2 \geq 0$ est

  Sa réciproque $x^2 \geq 0 \implies x \geq 0$ est
- $|x| = 0 \implies x = 0$ est

  la réciproque $x = 0 \implies |x| = 0$ est

Définition 6

Dire que deux propositions A et B sont équivalentes signifie que $A \Longrightarrow B$ et $B \Longrightarrow A$. On note alors $A \Longleftrightarrow B$.

Exemples :

- $|x| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$
- $(x^2 = 1) \Longleftrightarrow (x = 1 \text{ ou } x = -1)$

Danger ! *Resolution d'équation et équivalence*

Quand on résout des équations, il sera essentiel de procéder par équivalence, sous peine de perdre des solutions.

d) Contraposée

Définition 7

Soient A et B deux propositions. On appelle contraposée de $A \Longrightarrow B$ la phrase $\bar{B} \Longrightarrow \bar{A}$.

Exemple :

- "il pleut $\Longrightarrow$ il y a des nuages" a pour contraposée "il n'y a pas de nuages $\Longrightarrow$ il ne pleut pas"
- "$|x| = 0 \Longrightarrow x = 0$" a pour contraposée "$x \neq 0 \Longrightarrow |x| \neq 0$

Théorème 1

$A \Longrightarrow B$ et sa contraposée $\bar{B} \Longrightarrow \bar{A}$ sont équivalentes (i.e. vraies toutes les deux ou fausses toutes les deux).

▷ *Preuve :* La négation de "$A \Longrightarrow B$" est "B et $\bar{A}$".
La négation de "$\bar{B} \Longrightarrow \bar{A}$" est "$\bar{A}$ et $\bar{\bar{B}}$", c'est-à-dire "$\bar{A}$ et B".
Puisque les deux négations sont les mêmes, les propositions sont les mêmes. ◁

Méthode : *Preuve par contraposition :*

Comme une implication et sa contraposée ont même sens, il peut être utile de passer par la contraposée d'une proposition pour établir une propriété...

Ainsi, si on nous demande "montrer que si on a A, alors on a B", on peut montrer que "si on n'a pas B, alors on n'a pas A", ce qui revient en fait au même !

Exemple :
Montrer que pour tout entier naturel n, si n^2 est impair, alors n est impair
Autrement dit, on veut montrer

$$\forall n \in \mathbb{N},\ (n^2 \text{ est impair} \Longrightarrow n \text{ est impair}).$$

C'est en fait pas évident directement, et on va raisonner par contraposition.
Commençons par écrire la contraposée :

3) Le raisonnement par l'absurde

Méthode : *Le raisonnement par l'absurde*

Si on veut démontrer qu'une proposition A est vraie, on peut procéder par contradiction

1. On supposons que A est fausse (donc que $\bar{A}$ est vraie).
2. On fait des déductions logiques...
3. On arrive à une proposition B manifestement fausse
4. On en conclut que A est vraie

Exemples :

- Montrons que certains humains il y a 10 siècles ont eu des enfants :
  Si ce n'était pas le cas, alors aujourd'hui l'espèce humaine aurait disparu, puisque vous êtes là aujourd'hui, c'est impossible donc certains humains d'il y a 10 siècles ont eu des enfants.
- Le secret des dieux :
  Montrons que $\sqrt{2}$ est "irrationnel", c'est à dire que ce n'est pas une fraction.

4) Le raisonnement par récurrence :

a) Récurrence (simple) :

Théorème 2

Soit $\mathcal{P}(n)$ une proposition dépendant d'un entier n et soit $n_0 \in \mathbb{N}$. Si :

1. *$\mathcal{P}(n_0)$ est vraie.*
2. *Pour tout $n \geq n_0$, $\mathcal{P}(n) \Longrightarrow \mathcal{P}(n+1)$*

Alors $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq n_0$.

▷ *Preuve* : Il n'y a pas de "vraie" preuve de la récurrence : c'est un axiome. C'est le principe de récurrence qui garantie l'existence même des entiers naturels... ◁

Remarque :
Très souvent, $n_0 = 0$ ou $n_0 = 1$...

Méthode : *Plan de rédaction d'une récurrence simple*

Une récurrence peut être présentée de la façon suivante :

1. On annonce ce qu'on va faire : "Montrons par récurrence que pour tout $n \geq n_0$, on a ... ." où les ... représentent ce qu'on veut montrer.
2. On initialise en montrant que la proposition est vraie pour n_0.
3. On montre l'hérédité : "Soit un entier $n \geq n_0$. Supposons que 'on marque ici la propriété au rang n' et montrons 'on marque ici la propriété au rang $n+1$' "
4. On fait tous les calculs/raisonnements
5. On conclut : "d'après le principe de récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$.

Exemple :

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

b) Récurrence double :

La récurrence double est une variante de la récurrence. Elle est utilisée lorsqu'on a besoin des deux étapes précédentes pour déterminer l'étape suivante.

Méthode : *Plan de rédaction d'une récurrence double*

Une récurrence double peut être présentée de la façon suivante ($P(n)$ désignera la proposition au rang n) :

1. On annonce ce qu'on va faire : "Montrons par récurrence double que pour tout $n \geq n_0,\ P(n)$."
2. On initialise **sur deux rangs** : on montre que $P(n_0)$ et $P(n_0+1)$ sont vraies
3. On montre l'hérédité : "Soit un entier $n \geq n_0$. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ sont vraies et montrons $P(n+2)$
4. On fait les calculs et les raisonnements pour arriver à $P(n+2)$
5. On conclut : "d'après le principe de récurrence double, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$."

Exemple :
Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$, $u_1 = 1$ et pour tout $n \geq 0$, $u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n$. Montrez que $u_n = 2^n + (-1)^n$.

Remarque :
On peut tout à fait imaginer une récurrence triple, quadruple, etc... Il faut juste une triple (ou quadruple, etc...) initialisation et supposer que trois (ou quatre, etc...) étapes sont vraies lorsqu'on montre l'hérédité. Ce genre de récurrence est a priori hors programme.

III Calcul algébrique, vocabulaire et notations

1) Rappels sur la somme et le produit

a) Addition :

Considérons l'opération d'addition chez les nombres réels.

Propriété 2

Soit x, y et z trois réels. On a :
(i) $x+y=y+x$: on dit que l'addition de deux réels est ***commutative****.*
(ii) $x+(y+z)=(x+y)+z$: on dit que l'addition est ***associative****.*
(iii) $x+0=x$: on dit que le nombre 0 est ***l'élément neutre*** *pour "+".*

Ces deux propriétés permettent de faire des sommes assez librement chez les nombres réels, puisque l'on peut alors choisir l'ordre de calcul.

Exemple :
Soit $S=1+2+3+4+5+6+7+8+9+10$.
Par commutativité : $S=10+1+9+2+8+3+7+4+6+5$
Et par associativité : $S=10+(1+9)+(2+8)+(3+7)+(4+6)+5=10+10+10+10+10+5=55$

b) Produit :

Ces propriétés se retrouvent également pour le produit de réels :

Propriété 3

Pour tous réels x, y et z, on a
(i) $xy=yx$ (commutativité)
(ii) $(xy)z=x(yz)$ (associativité)
(iii) $x\times 1=x$ (1 est neutre pour la multiplication)

On dispose également d'une propriété importante appelée "distributivité" qui lie les deux :

Propriété 4

Pour tout réels x, y et z, on a

$$x(y+z)=xy+xz$$

C'est cette propriété qui permet la factorisation et le développement d'expressions.

Remarque :*
Par construction, l'opération puissance est vis-à-vis de la multiplication ce que la multiplication est vis-à-vis de l'addition.
Ce n'est donc pas surprenant qu'on ait

$$x^{yz}=x^y\times x^z.$$

Cependant la communitativité n'est pas conservée : $2^3\neq 3^2$.
Qu'en est-il de l'associativité ?

2) Symboles $\sum$ et $\prod$

a) Définitions :

Définition 8

Soient p et n deux nombres entiers avec $p \leq q$, et soient x_p, x_{p+1}, $\ldots x_n$ des réels.
On note $\sum_{k=p}^{n} x_k$ la somme de tout ces nombres, et $\prod_{k=p}^{n} x_k$ leur produit.

Autrement dit : $\sum_{k=p}^{n} x_k = x_p + x_{p+1} + \ldots x_n$ et $\prod_{k=p}^{n} x_k = x_p x_{p+1} \ldots x_n$
Ces écritures avec "..." sont appelée "écriture en extension".

Exemples :

- $\sum_{k=6}^{10} k = 6 + 7 + 8 + 9 + 10$
- $\sum_{k=3}^{5} x_k = x_3 + x_4 + x_5$
- $\sum_{j=1}^{3} j^2 =$
- $\prod_{k=1}^{3} (-1)^k =$
- $\sum_{k=1}^{7} x =$

Définition 9

Soit $n \in \mathbb{N}$. On appelle factoriel n, noté $n!$ le nombre défini par
(i) $0! = 1$
(ii) $n! = \prod_{k=1}^{n} k$ *si* $n \geq 1$.

Exemples

- $4! =$
- $6! =$

Propriété 5

Soit $n \geq 1$, alors $n! = n(n-1)!$

▷ *Preuve :*

◁

Remarques :

1. Les notations $\sum$ et $\prod$ pourront être utilisées dans n'importe quel ensemble où la somme (respectivement le produit) est commutatif. Par exemple pour les fonctions, les suites, etc...
2. On trouve également des écritures sous la forme de propriétés des indices considérés. Par exemple :

   ▶ $\sum_{\substack{0 \leq k \leq 10 \\ k \text{ pair}}} k = 0 + 2 + 4 + 6 + 8 + 10$

   ▶ Ou encore $\sum_{k \in A} k^2$ où A est un ensemble de nombres .

   Par exemple, si $A = \{-1, 0, 3\}$ alors $\sum_{k \in A} k^2 =$

b) Factorisation : "sortir de la somme"

Une somme décrite sous la forme $\sum$ se manipule comme une somme habituelle. On peut en particulier factoriser.

Exemples :

▶ $\sum_{k=0}^{10} 4x_k = 4 \sum_{k=0}^{10} x_k$: on a factorisé par 4.

▶ Soit $n \in \mathbb{N}$. $\sum_{k=1}^{n} n2^k =$

Remarque :
Il faut bien prendre le temps au sein d'une somme de repérer ce qui dépend de k et ce qui n'en dépend pas. Factoriser peut alors gagner beaucoup de temps.

Pour les produits, le comportement est différent, par exemple :

$$\prod_{k=1}^{3}(4k) \neq 4 \prod_{k=1}^{3} k \text{ mais vaut } 4^3 \prod_{k=1}^{3} k.$$

En fait, on aura

$$\prod_{k=i}^{n}(x \times y_k) = x^{n-i+1} \prod_{k=i}^{n}(y_k).$$

c) "Glissement" d'indice

Le k de la définition peut-être remplacé par n'importe quelle lettre qui n'est pas déjà utilisée, sans changer le sens de la somme. On dit que k est une variable muette.

Ainsi, par exemple $\sum_{k=1}^{n} x_k = \sum_{j=1}^{n} x_j$. Par contre, l'écriture $\sum_{n=1}^{n} x_n$ n'a aucun sens...

Comme ce qui dépend de k n'est qu'une façon de noter, on peut faire des "changements de variables" par glissement des indices :

$\sum_{k=1}^{5} x_{k-1} = x_0 + \ldots x_4 = \sum_{j=0}^{4} x_j$: ici, tout se passe comme si $j = k - 1$.

Méthode : *Glissement d'indice*

Soit une somme de la forme $\sum_{k=p}^{n} x_k$ dont ont veut faire glisser l'indice d'une quantité a.

- Première étape : on écrit le changement voulu $i = k + a$
- Deuxième étape : on calcule les nouvelles bornes : quand k vaut p (borne du bas), i vaut $p + a$, quand k vaut n (borne du haut), i vaut $n + a$.
- Troisième étape : on écrit k en fonction de i ($k = i - a$) et on remplace.

Cette méthode fonctionne également pour les produits.

Exemples

- $\prod_{k=3}^{5}(k-2)$
- $\sum_{k=2}^{5} x^{k-2}$

Méthode : *Inversion de l'ordre de sommation*

Il est parfois aussi utile d'utiliser la commutativité pour faire le changement d'indice $i = n - k$. On aura ainsi

$$\sum_{k=0}^{n} x_k = \sum_{i=0}^{n} x_{n-i}.$$

Danger ! *Uniquement des glissements et des inversions ?*

On a vu ici les "décalages" du type $i = k + a$ avec a entier relatif, et des changements qui reviennent à faire $i = -k + a$. Des changements du style "$i = 2k$" sont plus compliqués à réaliser, on évitera d'en faire cette année.

3) Formules...

a) Sommes usuelles à connaître

Propriété 6

Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit $q \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$, alors

1. $\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}$
2. $\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

▷ *Preuve :* On peut les faire par récurrence, ou avec des astuces dites de "téléscopage" (cf TD)

◁

b) Coefficients binomiaux

Définition 10

Soit k et n deux entiers. On appelle coefficient binomial le nombre noté $\binom{n}{k}$ défini par

$$\begin{cases} \binom{n}{k} & = 0 \text{ si } k < 0 \text{ ou } k > n \\ \binom{n}{k} & = \dfrac{n!}{k!(n-k)!} = \dfrac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} \end{cases}$$

Propriété 7

Soit E un ensemble de n éléments, alors $\binom{n}{k}$ est le nombre de façon différentes de choisir k éléments distincts de E.

▷ *Preuve* : Si $k < 0$ ou $k > n$, il n'y a pas de façons de choisir k éléments distincts de E. Sinon :

◁

Exemple :

- $\binom{4}{2} =$
- $\binom{6}{3}$
- $\binom{4}{0} =$
- $\binom{12}{4}$

Les propriétés suivantes sont à connaître sur les coefficients binomiaux :

Propriété 8

Soit k et n deux entiers naturels avec $k \leq n$

(i) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ *et pour* $k > 0$, $\binom{n}{k} = \dfrac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$

(ii) $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$ *(formule du triangle de Pascal)*

▷ *Preuve* :

◁

Exemple :
La relation triangulaire de Pascal permet de calculer facilement les coefficients binomiaux, sans utiliser la formule :

c) Généralisation des identités remarquables

Proposition 1

Formule du binôme de Newton.
Soit a et b deux nombres réels. Alors pour tout $n \geq 0$, on a :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

▷ *Preuve :*

◁

Exemples

- $(a+b)^2 =$
- soit $x \in \mathbb{R}$: $(x+1)^4 =$

4) Sommes doubles

a) Familles à indices doubles

Soit m et n deux entiers naturels non nuls et $a_{i,j}$ des nombres (complexes ou réels) dont les indices i et j sont des entiers tels que $1 \leq i \leq m$ et $1 \leq j \leq n$. On peut représenter cette famille dans un tableau :

Ainsi, i est le numero de ligne, j le numero de colonne. On gardera toujours cet ordre là en mathématiques et en informatique.

b) Somme double

Définition 11

Soit $(a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$ *une famille de* $m \times n$ *nombres.*
On note $S = \sum_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} a_{ij}$ *la somme de tous ces nombres.*

Exemple :
Considérons la somme $\sum_{\substack{1 \leq i \leq 3 \\ 1 \leq j \leq 4}} ij$

Propriété 9 (*Sommation par ligne, par colonne*)

Avec les notations précédentes, on a

$$\sum_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} a_{ij} = \sum_{i=1}^{m}(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}) = \sum_{j=1}^{n}(\sum_{i=1}^{m} a_{ij})$$

▷ *Preuve :* Pour tout $i \in [\![1, m]\!]$, on fait la somme des nombres sur la ligne numero i en posant $L_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}$. On ajoute ensuite toutes les lignes entre elles : $\sum_{i=1}^{m} L_i$: cela donne la première formule.

De même, on peut sommer sur les colonnes ($C_i = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}$), puis on additionne tout : c'est la deuxième formule

◁

Exemple :

$$\sum_{\substack{1 \leq i \leq 3 \\ 1 \leq j \leq 4}} ij$$

c) Somme triangulaire, variantes...

Tout comme les sommes "simples", on peut mettre d'autres conditions sur les sommes doubles. On parle par exemple de "somme triangulaire" pour des sommes de la forme $\sum_{1 \leq i \leq j \leq n}$

Exemple :

Soit $\sum_{1 \leq i \leq j \leq 3} ij$

Comme pour les sommes doubles "complètes", on peut décomposer :

Propriété 10 (*Sommation par ligne, par colonne*)

Avec les notations précédentes, on a

$$\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} a_{ij} = \sum_{i=1}^{n}(\sum_{j=i}^{n} a_{ij}) = \sum_{j=1}^{n}(\sum_{i=1}^{j} a_{ij})$$

Exemples :

- $\sum_{1 \leq i \leq j \leq 3} ij$

- $\sum_{0 \leq i \leq j \leq 4} j2^i$

Bien sûr d'autres variantes sont possibles, avec des conditions différentes (ce ne sont plus des sommes dites triangulaires du coup) :

- $\sum_{0<i+j<4} ij$

- $\sum_{i+j=4} 2^i(-1)^j$